6M

УДК 51 (071)

Л.П. Мироненко
Донецкий национальный технический университет, Украина
Украина, 83001, г. Донецк, ул. Артема, 58, *mironenko.leon@yandex.ru*

Применение вариационного принципа к одномерным стохастическим системам

L.P. Mironenko
Donetsk National Technical University (DonNTU), Ukraine
Ukraine, 83001, c. Donetsk, Artema st., 58

Appliance of the Variational Principle to One-Dimensional Stochastic Systems

Л.П. Мироненко
Донецький національний технічний університет, Україна
Україна, 83001, м. Донецьк, вул. Артема, 58

Використання варіаційного принципу найменшої дії до стохастичних систем

В статье рассмотрена возможность применения принципа наименьшего действия для механических систем к стохастическим системам с непрерывным распределением случайной величины. Функция Лагранжа выбрана в виде квадратичной формы по функциям распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)=\dot{F}(x)$. В результате получены дифференциальные уравнения, приводящие к четырем, хорошо известным в теории вероятности, распределениям: равномерному, линейному, гармоническому и экспоненциальному. Результаты получены в случае, когда функция Лагранжа не зависит от случайной величины явно, поэтому являются основой для дальнейшего исследования различных форм распределений.
Ключевые слова: вероятность, функция распределения, плотность распределения, функционал, действие, квадратичная форма, стохастические системы, параметр, вариационный принцип.

In the paper, application of the principle of least action of mechanical systems to stochastic systems with continuous random variables is considered. Lagrange function is determined as a quadratic form according to distribution function $F(x)$ and distribution density $f(x)=\dot{F}(x)$. As a result, differential equations, which lead to four well-known distribution laws of the theory of probability, i.e. random, linear, harmonic and exponential distribution, are obtained. The results were obtained in case when Lagrange function does not directly depend on the random variable, that’s why these results form the basis for further study of various forms of distributions.
Key words: theory of probability, distribution function, distribution density, quadratic form, functional, action, parameter, stochastic systems, variational principle.

У статті розглянуто можливість використання принципу найменшої дії механічних систем до стохастичних систем з неперервним розподілом випадкової величини. Функція Лагранжа побудована у квадратичній формі відносно функцій розподілу $F(x)$ і густини розподілу $f(x)=\dot{F}(x)$. Внаслідок отримані диференційні рівняння, що привели до чотирьох, добре відомих в теорії ймовірностей, розподілів: рівномірному, лінійному, гармонійному і експоненційному. Результати отримані у випадку, коли функція Лагранжа не залежить від випадкової величини неприховано, тому є основою для подальшого дослідження різних форм розподілів.
Ключові слова: теорія ймовірності, функція розподілу, густина розподілу, функціонал, дія, квадратична форма, стохастичні системи, параметр, варіаційний принцип.

Введение

Существует определенная аналогия в описании динамики механических и стохастических систем. Динамика механической системы полностью определяется законом изменения ее обобщенных координат от времени $q_i(t), i = 1,2,\ldots,s,$ а начальные обобщенные координаты $q_i(t_o) = q_{i0}$ и обобщенные скорости $\dot{q}_i(t_o) = \dot{q}_{i0}$ однозначно определяют последующие положения системы. В теории вероятностей такую же функцию выполняют функция распределения $F(x)$ случайной величины x и дифференциальная функция распределения $f(x) = \dot{F}(x)$, с той лишь разницей, что начальные условия заменяются краевыми условиями $F(a) = 0,\ F(b) = 1$ для функции $F(x)$. Именно эта аналогия может быть положена в установлении уравнений, которым должна удовлетворять функция $F(x)$.

Для механических систем разработан общий подход их описания, основанный на принципе наименьшего действия [1-3] как одном из функциональных методов [4-6], используемых в различных областях теоретической физики.

Целью работы является применение принципа наименьшего действия к стохастическим системам широкого класса и выяснение общих требований и ограничений для непрерывно распределенных случайных величин. В частности, установление фундаментальных соотношений, которым должны удовлетворять стационарные функции распределения и плотности распределения.

В работе рассмотрены одномерные распределения, но теория легко обобщается на многомерный случай независимых случайных событий и позволяет в принципе рассматривать зависимые события.

1 Принцип наименьшего действия в механике

Известно, что одним из самых общих подходов формулировки закона движения механических систем является *принцип наименьшего действия* [1], согласно которому каждая механическая система характеризуется некоторой функцией $L(q,\dot{q},t)$ обобщенных координат q, обобщенных скоростей $\dot{q} = dq/dt$ и времени t. Если система имеет s степеней свободы, то $q = (q_1, q_2, ..., q_s),\ \ \dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_s)$. Функция L однозначно определяет закон движения данной механической системы.

Пусть в моменты времени $t = t_1$ и $t = t_2$ система имеет координаты $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$. Тогда между $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$ система движется так, чтобы интеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q,\dot{q},t) \tag{1}$$

имел наименьшее возможное значение. Функция L называется *функцией Лагранжа* данной системы, а интеграл (1) – *действием.*

Рассмотрим систему с одной степенью свободы, так что должна быть определена одна функция $q_i(t)$. Пусть $q_i(t)$ искомая функция, для которой S имеет экстремум. Рассмотрим близкую траекторию $q_i(t) + \delta q(t)$, где $\delta q(t)$ – *вариация* функции $q_i(t)$ (функция, малая во всем интервале времени от t_1 до t_2). Поскольку при $t = t_1$ и $t = t_2$ все функции $q_i(t) + \delta q(t)$ должны принимать одни и те же значения $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$, то

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0\,. \tag{2}$$

Изменение S при замене $q_i(t)$ на ($q_i(t)+\delta q(t)$) дается первой вариацией

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2} dtL(q_i+\delta q,\dot q_i+\delta\dot q,t)-\int_{t_1}^{t_2} dtL(q_i,\dot q_i,t)=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\delta\dot q_i\right)dt\,.$$

Необходимым условием экстремума S является условие $\delta S=0$. Замечая, что $\delta\dot q=\frac{d}{dt}\delta q$, проинтегрируем второй член по частям и получим:

$$\delta S=\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\right)\delta q dt=0\,.$$

В силу условий (2) первый член в этом выражении равен нулю. Остается интеграл, который должен быть равен нулю при произвольных δq. Это возможно только в том случае, если подынтегральное выражение равно нулю тождественно. Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0\,. \tag{3}$$

При наличии s (независимых) степеней свободы в принципе наименьшего действия должны независимо варьироваться s функций $q_i(t)$, $i=1,2,...,s$. Очевидно, что получим s уравнений вида (3). Эти дифференциальные уравнения в механике называются *уравнениями Лагранжа.* Если функция Лагранжа данной механической системы известна, то уравнения (3) $i=1,2,...,s$ представляют собой уравнения движения системы.

С математической точки зрения уравнения (3) составляют систему s уравнений второго порядка для s неизвестных функций $q_i(t)$. Общее решение такой системы содержит $2s$ произвольных постоянных. Для их определения необходимо знание начальных условий, характеризующих состояние системы в некоторый заданный момент времени, например, задание начальных значений всех координат и скоростей $q_i(t_o)=q_{oi}$, $\ddot q_i(t_o)=\dot q_{oi}$, $i=1,2,...s$.

Рассмотрим некоторые общие свойства функции Лагранжа, которые понадобятся в дальнейшем.

1. Свойство аддитивности функции Лагранжа L. Пусть механическая система состоит из двух частей A и B, каждая из которых замкнута, тогда функции Лагранжа частей L_A и L_B. Если пренебречь взаимодействием между частями, то функция Лагранжа всей системы $L=L_A+L_B$.

Замечание. Умножение функции Лагранжа системы на произвольный множитель не отражается на уравнениях движения.

2. Функция Лагранжа определена с точностью до прибавления к ней полной производной от любой функции координат и времени. Рассмотрим две функции $L'(q,\dot q,t)$ и $L(q,\dot q,t)$, отличающиеся друг от друга на полную производную по времени от какой-либо функции координат и времени $f(q,t)$:

$$L'(q,\dot q,t)=L(q,\dot q,t)+\frac{d}{dt}f(q,t)\,. \tag{4}$$

Вычисленные с помощью этих двух функций интегралы (1) связаны соотношением

$$S'=\int_{t_1}^{t_2} dtL'(q,\dot q,t)=\int_{t_1}^{t_2} dtL(q,\dot q,t)+\int_{t_1}^{t_2} dt\frac{d}{dt}f(q,t)=S+f(q^{(2)},t_2)-f(q^{(1)},t_1),$$

т.е. отличаются друг от друга членом, исчезающим при варьировании действия, так что условие $\delta S' = 0$ совпадает с условием $\delta S = 0$, и вид уравнений движения остается неизменным.

2 Вариационный принцип в теории вероятностей

Рассмотрим стохастическую систему с непрерывно распределенной случайной величиной x, функцией распределения $F(x)$ и плотностью $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$, которую в дальнейшем будем обозначать $\dot{F}(x)$. Функция Лагранжа системы $L(F, \dot{F}, x)$, а действие

$$\int_{x_1}^{x_2} L(F, \dot{F}, x)dx. \qquad (5)$$

Пределы интегрирования могут быть неограниченными $x_1 = -\infty,\ \ x_2 = +\infty$.

Произведем варьирование $\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial L}{\partial F}\delta F + \frac{\partial L}{\partial \dot{F}}\delta \dot{F}\right)dx = 0$, учтем $\delta \dot{F} = \frac{d}{dx}\delta F$, проинтегрируем второй член по частям, получим:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{F}}\delta F\Bigg|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial L}{\partial F} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial \dot{F}}\right)\delta F dx \ = 0\ . \qquad (6)$$

В точках x_1 и x_2 должны выполняться условия

$$\delta F(x_1) = \delta F(x_2) = 0\ . \qquad (7)$$

В случае неограниченного изменения случайной величины на бесконечности функция распределения $F(x)$ определена значениями $F(-\infty) = 0$ и $F(+\infty) = 1$, поэтому $\delta F(-\infty) = \delta F(+\infty) = 0$.

В силу условий (7) первый член в выражении (6) равен нулю. Остается интеграл, который должен быть равен нулю при произвольных значениях δF. Это возможно, если

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial \dot{F}} - \frac{\partial L}{\partial F} = 0\ . \qquad (8)$$

При наличии s независимых случайных распределений F_i в принципе наименьшего действия должны независимо варьироваться s различных функций $F_i(x)$. Очевидно, что получим s уравнений вида (8).

Если функция Лагранжа данной стохастической системы известна, то уравнение (8) представляет собой уравнение для определения функции F распределения системы.

В общем случае уравнения (8) для неизвестных $F_i(x)$, $i = 1,2,...s$ составляют систему s уравнений второго порядка. Общее решение такой системы содержит $2s$ произвольных постоянных. Для их определения необходимо знание граничных условий, например, $F_i(-\infty) = 0$ и $F_i(+\infty) = 1,\ \ i = 1,2,...s.$

3 Различные виды распределений случаев квадратичной формы функции Лагранжа

Построим функцию Лагранжа по аналогии с «механической» функцией Лагранжа $L = T(\dot{q}) - U(q)$, где $T = \frac{m\dot{q}^2}{2}$ – обобщенная кинетическая энергия системы, состоящей из

одной частицы массой m, $U(q)$ – ее потенциальная энергия во внешнем поле. Возможны различные варианты функции Лагранжа. В данной работе ограничимся только квадратичной формой переменных $F,\dot{F}$. Исследование будем проводить от простого до самого общего случая.

1. *Равномерное распределение* на отрезке $[a,b]$. Выберем функцию Лагранжа в самом простом виде $L=\dot{F}^2/2$. Как известно, в механике такой выбор функции Лагранжа соответствует движению частицы с постоянной скоростью $\dot{q}=\dot{q}_o=const$ и линейному закону движения $q=\dot{q}_o t+q_o$, где $q(0)=q_o$ и $\dot{q}(0)=\dot{q}_o$ – начальные значения координаты и скорости частицы в момент времени $t_o=0$.

В этом случае $\partial L/\partial F=0$ и уравнение Лагранжа имеет простейший вид $\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial \dot{F}}=0$. Подставляя $\partial L/\partial\dot{F}=\dot{F}$, получим $\ddot{F}=0.$ Решение уравнения $F=C_1x+C_2$. Используя граничные условия $F(a)=0,\ F(b)=1$, найдем постоянные интегрирования $C_1=\frac{1}{b-a},\ C_2=-\frac{a}{b-a}$. Окончательно, функция распределения $F(x)$ и плотность $\dot{F}(x)$ имеют вид

$$F(x)=\frac{x-a}{b-a},\quad f(x)=\dot{F}(x)=\frac{1}{b-a}. \tag{9}$$

Это хорошо известное в теории вероятностей *равномерное распределение* или распределение с постоянной плотностью $\frac{1}{b-a}$.

2. *Линейное распределение* на отрезке $[a,b]$. Выберем функцию Лагранжа в виде $L=\dot{F}^2/2+2AF$, где A – заданный параметр распределения.

В этом случае $\partial L/\partial F=2A,\ \partial L/\partial\dot{F}=\dot{F}$ и уравнение Лагранжа имеет вид $\ddot{F}=2A.$ Решение уравнения $F=Ax^2+C_1x+C_2$. Используя граничные условия $F(a)=0,\ F(b)=1$, найдем постоянные интегрирования

$$C_1=\frac{1-A(b^2-a^2)}{b-a},\ C_2=\left(\frac{-1+Ab(b-a)}{b-a}\right)a.$$

Окончательно, функция распределения $F(x)$ и плотность $\dot{F}(x)$ имеют вид

$$F(x)=Ax^2+A\big(ab-(b+a)x\big)+\frac{x-a}{b-a},\quad f(x)=\dot{F}(x)=2Ax+\frac{1-A(b^2-a^2)}{b-a}. \tag{10}$$

В частности, при $A=0$ получаем равномерное распределение (9).

В другом частном случае $a=0,\ b=1,\ A=1$ имеем простейшую форму линейного закона $F(x)=x^2,\ f(x)=\dot{F}(x)=2x.$

3. *Гармоническое распределение* на отрезке $[a,b]$. Выберем функцию Лагранжа в виде $L=\dot{F}^2/2-\omega^2F^2/2$, где ω – параметр распределения. Тогда $\partial L/\partial F=-\omega^2F$, $\partial L/\partial\dot{F}=\dot{F}$, получим уравнение осциллятора $\ddot{F}+\omega^2F=0.$ Решение уравнения $F=C_1\sin\omega x+C_2\cos\omega x$. Используем граничные условия $F(a)=0,\ F(b)=1$, найдем постоянные интегрирования

$$\begin{cases}C_1\sin\omega a+C_2\cos\omega a=0\\ C_1\sin\omega b+C_2\cos\omega b=1\end{cases}\Rightarrow.\begin{cases}C_1=-\dfrac{\cos\omega a}{\cos\omega b\sin\omega a-\cos\omega a\sin\omega b}=-\dfrac{\cos\omega a}{\sin\omega(a-b)}\\ C_2=\dfrac{\sin\omega a}{\cos\omega b\sin\omega a-\cos\omega a\sin\omega b}=\dfrac{\sin\omega a}{\sin\omega(a-b)}\end{cases}$$

Окончательно, функция распределения $F(x)$ и плотность $\dot{F}(x)$ имеют вид

$$F(x)=\frac{\sin\omega(a-x)}{\sin\omega(a-b)},\quad f(x)=\dot{F}(x)=-\omega\frac{\cos\omega(a-x)}{\sin\omega(a-b)},\ f(x)\ge 0. \qquad (11)$$

Замечание. Найденная функция $F(x)$ нормирована, но еще не является функцией распределения, поскольку она должна быть неубывающей [7], [8], а это условие никаким образом не учтено. Следует потребовать, чтобы изменение параметров ω и a,b распределения (11) удовлетворяли неравенству $f(x)\ge 0$.

4. *Экспоненциальное распределение* на отрезке $[a,b]$. Выберем функцию Лагранжа в виде $L=\dot{F}^2/2+\lambda^2F^2/2$, где λ – параметр распределения. Тогда $\partial L/\partial F=\lambda^2F$, $\partial L/\partial\dot{F}=\dot{F}$, и уравнение Лагранжа имеет вид $\ddot{F}-\lambda^2F=0$. Решение уравнения $F=C_1e^{\lambda x}+C_2e^{-\lambda x}$. Используя граничные условия $F(a)=0,\ F(b)=1$, найдем постоянные интегрирования

$$\begin{cases}C_1e^{\lambda a}+C_2e^{-\lambda a}=0\\ C_1e^{\lambda b}+C_2e^{-\lambda b}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=2e^{-\lambda a}sh^{-1}\lambda(b-a)\\ C_2=-2e^{\lambda a}sh^{-1}\lambda(b-a)\end{cases}.$$

Окончательно, функция распределения $F(x)$ и плотность $\dot{F}(x)$ имеют вид

$$F(x)=\frac{e^{\lambda(x-a)}-e^{-\lambda(x-a)}}{e^{\lambda(b-a)}-e^{-\lambda(b-a)}}=\frac{sh\lambda(x-a)}{sh\lambda(b-a)},\quad f(x)=\dot{F}(x)=\lambda\frac{ch\lambda(x-a)}{sh\lambda(b-a)}, f(x)\ge 0. \qquad (12)$$

Для этого распределения имеет место замечание аналогичное, что и для гармонического закона (11), именно условие $f(x)\ge 0$ определяет монотонность функции $F(x)$.

5. Распределения, основанные на квадратичной форме функции Лагранжа $L(F,\dot{F})$ общего вида

$$L=a_{11}\dot{F}^2+2a_{12}\dot{F}F+a_{22}F^2+2a_{13}\dot{F}+2a_{23}F+a_{33}, \qquad (13)$$

где a_{ij} – элементы симметричной матрицы квадратичной формы есть заданные действительные числа.

В этом случае $\partial L/\partial\dot{F}=2a_{11}\dot{F}+2a_{12}F+2a_{13}$, $\partial L/\partial F=2a_{12}\dot{F}+2a_{22}F+2a_{23}$ и уравнение Лагранжа имеет вид

$$a_{11}\ddot{F}-a_{22}F-a_{23}=0. \qquad (14)$$

Как видно, часть членов квадратичной формы (13) не входит в уравнение Лагранжа, что легко объясняется свойством функции Лагранжа: она определена с точностью до прибавления к ней полной производной от любой функции $f(F,x)$.

$$L'(\dot{F},F,x)=L(\dot{F},F,x)+\frac{d}{dt}f(F,x).$$

Запишем измененную функцию Лагранжа, т.е. такую, которая отражается на уравнении Лагранжа ,

$$L_{эфф.}=a_{11}\dot{F}^2+a_{22}F^2+2a_{23}F. \qquad (15)$$

Вернемся к уравнению (14). Это уравнение содержит три коэффициента a_{11},a_{22},a_{23}, из которых только два независимых и $a_{11}\ne 0$. Поэтому можно положить $a_{11}=1$. Тогда уравнение (14) примет вид $\ddot{F}-a_{22}F-a_{23}=0$. Из него следуют все ранее рассмотренные случаи распределений в зависимости от выбора коэффициентов a_{22},a_{23} [9], [10].

1) $a_{22}=a_{23}=0$ – равномерное распределение;

2) $a_{22}=0,\ a_{23}\ne 0$ – линейное распределение;

3) $a_{22} < 0,\ a_{23} = 0$ – гармоническое распределение;

4) $a_{22} > 0,\ a_{23} = 0$ – экспоненциальное распределение.

Рассмотрим последний случай при $a_{23} \neq 0$. Составим характеристическое уравнение для уравнения $\ddot{F} - a_{22}F = a_{23}$: $k^2 - a_{22} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = a_{22} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{a_{22}}$. Общее решение однородного уравнения $\ddot{F} - a_{22}F = 0$ есть $F_{GH} = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$. Частное решение неоднородного уравнения $\ddot{F} - a_{22}F = a_{23}$ есть $F_{PS} = -a_{23}/a_{22}$. В результате общее решение уравнения

$$F_{GS} = F_{GH} + F_{PS} = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x} - a_{23}/a_{22}. \qquad (16)$$

Пусть случайная величина изменяется на промежутке $[0,+\infty)$, Тогда функция распределения должна удовлетворять граничным условиям $F(0) = 0,\ F(+\infty) = 1$. Это означает, что в решении (16) следует положить $C_1 = 0$, $C_2 = -1$, а $-a_{23}/a_{22} = 1$. В результате, функция распределения $F(x)$ и плотность $\dot{F}(x)$ имеют вид

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x},\ \dot{F}(x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

Это хорошо известный экспоненциальный закон распределения. Как видно, он следует из принципа наименьшего действия с функцией Лагранжа

$$L_{эфф} = \dot{F}^2 + \lambda^2(F^2 - 2F).$$

4 Пути обобщения теории и граничные условия

В предыдущем пункте рассмотрен случай квадратичной формы функции Лагранжа с постоянными коэффициентами a_{ij}. В этом случае теория приводит к дифференциальным уравнениям второго порядка с постоянными коэффициентами. Такие уравнения хорошо исследованы и их решения не вызывают затруднений [9], [10].

Одним из путей обобщения теории является введение переменных коэффициентов $a_{ij}(x)$. Такое обобщение существенно увеличивает класс функций, относящихся к функциям распределения $F(x)$. При этом основное уравнение (14) значительно изменяется, например, в уравнении появляется производная $\dot{F}(x)$, которая отсутствовала в прежней теории. Кроме того, в уравнении Лагранжа коэффициенты a_{ij} становятся частично зависимыми между собой, что представляет значительное ограничение на претендентов на функцию распределения.

6. Распределения, основанные на квадратичной форме функции Лагранжа явно зависящей от случайной величины $L(F, \dot{F}, x)$. Рассмотрим функцию Лагранжа в виде квадратичной формы, но с переменными коэффициентами

$$L = a_{11}(x)\dot{F}^2 + 2a_{12}(x)\dot{F}F + a_{22}(x)F^2 + 2a_{13}(x)\dot{F} + 2a_{23}(x)F + a_{33}(x).$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial \dot{F}} - \frac{\partial L}{\partial F} = 2a_{11}\ddot{F} + 2a'_{11}\dot{F} + 2a'_{12}F + 2a'_{13} - 2a_{22}F - 2a_{23}.$$

В результате имеем уравнение

$$a_{11}\ddot{F} + a'_{11}\dot{F} + (a'_{12} - a_{22})F + a'_{13} - a_{23} = 0.$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами не всегда допускает решение в элементарных функциях и, как правило, требует специальных методов решения.

Для установления единственности решения на отрезке $[a,b]$ обычно достаточно использовать краевые условия $F(a)=0,\ F(b)=1$, которые, в случае неограниченного интервала изменения случайной величины, заменяются условиями $F(-\infty)=0,\ F(+\infty)=1$. В некоторых условиях задачи удобно использовать «начальные условия», т.е. $F(-\infty)=0,\ \dot{F}(-\infty)=0$, поскольку плотность распределения $f(x)=\dot{F}(x)$ на бесконечности равна нулю.

Важным свойством функции распределения является ее монотонность. Это свойство проще записать через плотность в виде неравенства $f(x)\geq 0$. Неравенство отсекает растущие на бесконечности решения.

Как видно, существует ряд ограничений на класс функций распределения – это граничные условия (два) для функции распределения и (два) для плотности, а также условие монотонности $f(x)\geq 0$. Эти условия позволяет определять уравнения Лагранжа более высокого порядка, чем второй. В этом состоит еще один из путей обобщения принципа наименьшего действия.

Наконец, нами рассмотрена функция Лагранжа в виде квадратичной формы в переменных $F,\ \dot{F}$, но нет принципиального запрета на более высокие порядки переменных $F,\ \ \dot{F}$. В этом можно рассматривать как еще один путь обобщения рассмотренной теории.

Выводы

В результате применения принципа наименьшего действия к стохастическим системам с непрерывным распределением случайной величины получены уравнения Лагранжа для функции распределения случайной величины. Исследована функция Лагранжа систем в одномерном случае распределения в рамках квадратичной формы по функциям распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)=\dot{F}(x)$. Функция Лагранжа в приближении квадратичной формы и коэффициентами этой формы, другими словами, в отсутствии явной зависимости функции Лагранжа от случайной величины приводит к четырем, хорошо известным в теории вероятности распределениям: равномерному, линейному, гармоническому и экспоненциальному. Эти законы распределения получены без постановки конкретных физических условий протекания стохастических экспериментов.

Из теоретической механики позаимствована только аналогия: функция распределения играет роль «потенциальной энергии» рассматриваемой системы, точнее источника внешнего потенциального поля, а плотность распределения, будучи производной от функции распределения $f(x)=\dot{F}(x)$, определяет «кинетическую энергию» системы. Функция Лагранжа механической системы определяется как разность между кинетической и потенциальной энергиями. Независимость функции Лагранжа стохастической системы явно от случайной величины означает, что рассматриваются стохастические системы, в которых энергия сохраняется, только переходит из кинетической в потенциальную и наоборот. Именно это обстоятельство приводит к четырем фундаментальным функциям распределения. Становится очевидным, что остальные известные и неизвестные законы распределения могут быть получены в рамках данной теории, но только для

неконсервативных стохастических систем, т.е. для систем с диссипацией. Это важный вывод теории.

Литература

1. Ландау Л.Д. Теоретическая физика. Механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : Наука, 1988. – Т. 1. – 216 с.
2. Лагранж Ж. Аналитическая механика / Лагранж Ж. – Москва ; Ленинград : Гос. изд. технико-теоретической лит., 1949. – Т. 1. – 594 с.
3. Лагранж Ж. Аналитическая механика / Лагранж Ж. – Москва ; Ленинград : Гос. изд. технико-теоретической лит., 1950. – Т. 2. – 440 с.
4. Васильев А.Н. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике / Васильев А.Н. – Ленинград : Изд. Ленинградского университета, 1976. – 294 с.
5. Новожилов Ю.В. Метод функционалов в квантовой теории поля / Ю.В. Новожилов, А.В. Тулуб // УФН. – 1957. – Т. LXI, Вып. 1. – С. 53-102.
6. Захаров А.Ю. Функциональные методы в классической статистической физике : учебное пособие / Захаров А.Ю. – Новгород : Новгородский гос. университет, 2006. – 53 с.
7. Вентцель Е.В. Теория вероятностей / Вентцель Е.В. – М. : Наука, 1969. – 363 с
8. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения / Феллер В. – М. : Главная ред. Ф-М лит., 1960. – 488 с.
9. Камке Э. Справочник по обыкновенными дифференциальным уравнениям / Камке Э. – М. : Наука, 1974. – 576 с.
10. Моденов В.П. Дифференциальные уравнения. Курс лекций / Моденов В.П. – М. : МГУ, 2003. – 82 с.

Literatura

1. Landau L.D., Lifshic E.M. Teoreticheskaja fizika. Mehanika. T.1. M.: Nauka. 1988. 216 s
2. Lagranzh Zh. Analiticheskaja mehanika. T.1. Gos. izd. tehniko-teoreticheskoj lit. Moskva-Leningrad. 1949. 594 s.
3. Lagranzh Zh. Analiticheskaja mehanika. T.2. Gos. izd. tehniko-teoreticheskoj lit. Moskva-Leningrad. 1950. 440 s.
4. Vasil’ev A.N. Funkcional’nye metody v kvantovoj teorii polja i statistike. Izd. Leningradskogo universiteta, Leningrad. 1976, 294 s.
5. Novozhilov Ju.V., Tulub A.V. Metod funkcionalov v kvantovoj teorii polja. UFN. T. LXI. Vyp. 1. 1957. S. 53-102
6. Zaharov A.Ju. Funkcional’nye metody v klassicheskoj statisticheskoj fizike. Uchebnoe posobie. Novgorod. Novgorodskij gos. universitet. 2006. 53 s.
7. Ventcel’ E.V. Teorija verojatnostej. M.: Nauka. 1969. 363 s.
8. Feller V. Vvedenie v teoriju verojatnostej i ee prilozhenija. M.: Glavnaja red. F-M lit.. 1960. 488 s.
9. Kamke Je. Spravochnik po obyknovennymi differencial’nym uravnenijam. M.: Nauka. 1974. 576 s.
10. Modenov V.P. Differencial’nye uravnenija. Kurs lekcij. M.: MGU. 2003. 82 s.

L.P.Mironenko

Appliance of the Variational Principle to One-Dimensional Stochastic Systems

According to the the mechanical variational principle [1], action $\int_{x_1}^{x_2} L(F,\dot{F},x)dx$ is applied to stochastic systems with a continuous distribution function $F(x)$ of a casual variable x. The Lagrange function is determined as a quadratic form of distribution function $F(x)$ and distribution density $f(x)=\dot{F}(x)$

$$L = a_{11}\dot{F}^2 + 2a_{12}\dot{F}F + a_{22}F^2 + 2a_{13}\dot{F} + 2a_{23}F + a_{33}, \qquad (1)$$

where a_{ij} is symmetric matrix of a quadratic form (1).

The functional $\int_a^b L(F,\dot{F},x)dx$ is minimized by Lagrange equation

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial \dot{F}} - \frac{\partial L}{\partial F} = 0. \qquad (2)$$

In the result we obtained differential equations for the distribution function F, which is satisfied to the boundary conditions: $F(a)=0,\ F(b)=1$.

The equations for the distribution function F give four well-known distribution laws of the theory of probability [2-3].

1) $a_{22}=a_{23}=0$ is the distribution with a constant density

$$F(x)=\frac{x-a}{b-a}, \quad f(x)=\dot{F}(x)=\frac{1}{b-a}.$$

2) $a_{22}=0,\ a_{23}\neq 0$ is the linear distribution

$$F(x) = Ax^2 + A(ab-(b+a)x) + \frac{x-a}{b-a}, \quad f(x) = 2Ax + \frac{1-A(b^2-a^2)}{b-a},$$

where A is a parameter of the distribution.

3) $a_{22}<0,\ a_{23}=0$ is the harmonic distribution with a parameter ω

$$F(x) = \frac{\sin\omega(a-x)}{\sin\omega(a-b)}, \quad f(x) = \dot{F}(x) = -\omega\frac{\cos\omega(a-x)}{\sin\omega(a-b)}, \quad f(x)\geq 0.$$

4) $a_{22}>0,\ a_{23}=0$ is the exponential distribution with a parameter λ

$$F(x) = \frac{e^{\lambda(x-a)} - e^{-\lambda(x-a)}}{e^{\lambda(b-a)} - e^{-\lambda(b-a)}} = \frac{sh\lambda(x-a)}{sh\lambda(b-a)}, \quad f(x) = \lambda\frac{ch\lambda(x-a)}{sh\lambda(b-a)}, f(x)\geq 0.$$

For example, in the last case at $a_{23}\neq 0$ and $x\in[0,+\infty)$ we have the well-known law

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \ \dot{F}(x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

The results were obtained only for case when Lagrange functions do not directly depend on random variable. The approach is a basis for further finding and construction of different forms of distributions.

Статья поступила в редакцию 21.11.2011.